PAP 2.2
Versuch 251: "Statistik des radioaktiven Zerfall"

Jonas Schweer

15. Januar 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**
- 1.1 Ziel des Versuchs . . . 2
- 1.2 Versuchsaufbau . . . 2
- 1.3 Statistische Grundlagen . . . 2
  - 1.3.1 Warum Wahrscheinlichkeitsverteilungen? . . . 2
  - 1.3.2 Binomial-Verteilung . . . 3
  - 1.3.3 Poisson-Verteilung . . . 3
  - 1.3.4 Gauß-Verteilung . . . 4
- 1.4 Physikalische Grundlagen . . . 5
  - 1.4.1 Radiokativität . . . 5
  - 1.4.2 Geiger-Müller-Zählrohr . . . 5

2 Messprotokoll **5**

3 Auswertung **8**
- 3.1 Aufgabe 1 . . . 8
- 3.2 Aufgabe 2 . . . 9
- 3.3 Aufgabe 3 . . . 10
- 3.4 Aufgabe 4 . . . 13

4 Zusammenfassung und Diskussion **15**

1 Einleitung

1.1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch wollen wir die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls überprüfen. Dafür messen wir zuerst die Zählrohrcharakteristik unseres verwendeten Geiger-Müller-Zählrohrs für eine bestimme Einsatzspannung. Daraufhin analysieren wir die Zählrate im Plateaubereich des Zählrohrs unter Berücksichtigung der statistischen Schwankungen. Wir führen anschließend zwei Langzeitmessung durch, mit der wir die statistische Natur des Zerfalls besser darstellen wollen und mit jeweils einer Gauß- und Poissonverteilung vergleichen wollen.

1.2 Versuchsaufbau

Der Aufbau besteht im wesentlichen aus einem Geiger-Müller-Zählrohr, welches auf einen Präparatehalter mit Bleiabschirmung zeigt, in den wir das untersuchte Präparat einspannen. Die Halterung befindet sich auf einer Schiene, sodass der Abstand zum Zählrohr angepasst werden kann. Das Zählrohr ist mit dem zugehörigen Betriebsgerät verbunden, mit welchem sich Einstellungen wie Betriebsspannung vornehmen lassen. Die Zählrate wird von dem Betriebsgerät an einen externen Impulszähler weitergegeben, welches seine Messwerte an einen Computer weitergibt, welcher die Messdaten speichert und visuell auswertet (in Form von Histogrammen).

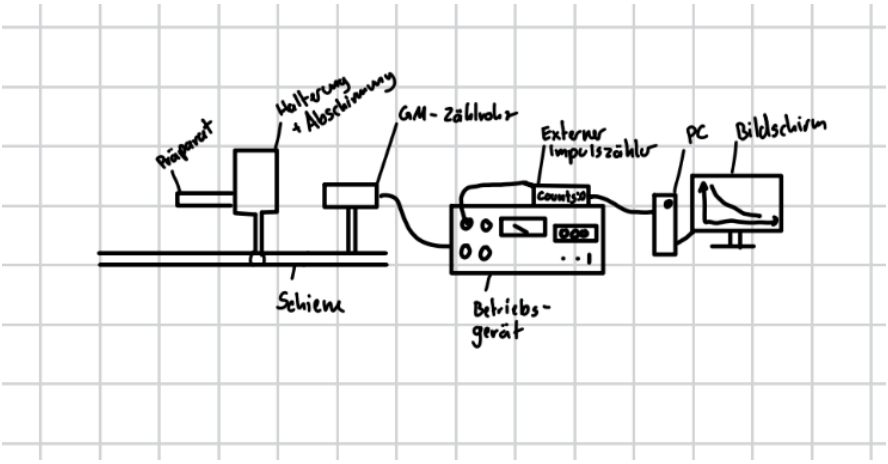


Abbildung 1: Messaufbau

1.3 Statistische Grundlagen

1.3.1 Warum Wahrscheinlichkeitsverteilungen?

Zwar gibt es physikalische Phänomene, wie zum Beispiel der hier untersuchte radioaktive Zerfall, für den sich in Einzelfällen keine Vorhersagen treffen lassen, da sie vollständig dem Zufall überlassen sind. So kann man nicht genau sagen, wann genau ein einzelner Atomkern zerfallen wird. Jedoch heißt das nicht, dass sich diese Dinge nicht analysieren lassen. So kann man bei längeren Messungen vieler Ereignisse doch durchaus Gesetze

und Zusammenhänge finden. So wird man oftmals herausfinden, dass zwar einzelne Ereignisse zufällig sind, sie jedoch alle um einen gewissen Wert schwanken und verschieden stark davon abweichen. Mit diesem Wissen kann man durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen die Form vorhersagen, die eine große Anzahl an Messwerten aufweisen würden.

1.3.2 Binomial-Verteilung

Die Binomialverteilung wir vor allem in einem konkreten Szenario: Ein Versuch hat genau zwei Ausgangsmöglichkeiten, die bei jeder Durchführung eine gleichbleibende Wahrscheinlichkeit haben (z.B. Ein Münzwurf oder das Würfeln eines Würfels, wenn man nur betrachtet, ob man eine Sechs gewürfelt hat oder nicht). Die Verteilung gibt nun an, wie Wahrscheinlich es ist, in n Durchführungen, k mal das Ergebnis mit Wahrscheinlichkeit p zu erhalten. Berechnen lässt sich diese Wahrscheinlichkeit durch:

$$B(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{1}$$

Die Eigenschaften dieser Verteilung lauten:

$$\text{Normierung: } \sum_{k=0}^{n} B(k;n,p) = 1 \tag{2}$$

$$\text{Mittelwert: } < k >= np = \mu \tag{3}$$

$$\text{Varianz: } Var = \sigma^2 = np(1-p) \tag{4}$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{np(1-p)} \tag{5}$$

1.3.3 Poisson-Verteilung

Betrachten wir nun einen Versuch, bei dem es zwar immer noch nur zwei verschiedene Ergebnisse gibt, jedoch die Wahrscheinlichkeit für das eine sehr sehr gering ist, wir jedoch die Anzahl der Versuchsdurchführungen sehr sehr groß werden lassen. Außerdem wollen wir den Mittelwert weiterhin endlich lassen. Mathematisch gesehen betrachten wir also den Fall: $p \to 0, n \to \infty, np < \infty$. In diesem Fall können wir von der Binomial-Verteilung zu einer Poissonverteilung übergehen. Die Wahrscheinlichkeit für k Ereignisse ist nun berechenbar durch:

$$P(k;\mu) = \frac{\mu^k e^{-k}}{k!} \tag{6}$$

Diese Verteilung erfüllt folgende Eigenschaften:

$$\text{Normierung: } \sum_{k=0}^{\infty} P(k;\mu) = 1 \tag{7}$$

$$\text{Mittelwert: } < k >= \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(k;\mu) = \mu \tag{8}$$

$$\text{Varianz: } Var = \mu \tag{9}$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{\mu} \tag{10}$$

1.3.4 Gauß-Verteilung

Für große Mittelwerte ($\mu > 30$) kann man die Poisson-Verteilung (welche zunehmend asymmetrisch wird) durch die symmetrische Gauß-Verteilung angenähert werden. Diese ist gegeben als:

$$G(k;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}\right] \tag{11}$$

Bei dieser Verteilung sind die Eigenschaften wie folgt:

$$\text{Normierung: } \int_{-\infty}^{\infty} G(k;\mu,\sigma)\, dk = 1 \tag{12}$$

$$\text{Mittelwert: } \int_{-\infty}^{\infty} k\, G(k;\mu,\sigma)\, dk = \mu \tag{13}$$

$$\text{Varianz: } \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} k^2\, G(k;\mu,\sigma)\, dk - < k >^2 \tag{14}$$

Bei Zählversuchen gilt des Weiteren die Näherung: $\sigma = \sqrt{\mu}$ und da laut Poisson $k \approx \mu$ können wir $\sigma \approx \sqrt{k}$ annehmen.
Um die Wahrscheinlichkeit, dass k um mehr als ein Vielfaches m von σ abweicht, zu erhalten, nutzt man:

$$P_{n\sigma} = 1 - \int_{\mu-n\sigma}^{\mu+n\sigma} G\, dk \tag{15}$$

So erhält man für eine 1-σ-Abweichung $P_\sigma = 31.73\%$, für eine 2-σ-Abweichung $P_{2\sigma} = 4.55\%$ und für eine 3-σ-Abweichung $P_{3\sigma} = 0.27\%$
Um die Standardabweichung einer Gaußkurve abzuschätzen, kann man sich folgende Beziehung einprägen:

$$FWHM \approx 2.4\sigma \tag{16}$$

Dabei steht $FWHM$ für $full\, width\, at\, half\, maximum$ und beschreibt die Breite der Kurve auf der halben Höhe.

Um den statistischen Fehler einer Differenz zweier Einzelmessungen zu berechnen, nutzt man:

$$\sigma_\Delta = \sqrt{k_1 + k_2} \tag{17}$$

Wenn $\frac{\Delta}{\sigma_\Delta} \geq 3$, sind die Messungen signifikant verschieden und vermutlich liegt eine Änderung der Systembedingungen vor um die Abweichung zu erklären.

1.4 Physikalische Grundlagen

1.4.1 Radiokativität

Wenn Atomkerne in einen instabilen Zustand geraten (z.B. durch zusätzliche Neutronen), fangen sie an, radioaktive Strahlen abzusondern, um wieder in einen stabilen Zustand zurückzukommen. Dieses Phänomen bezeichnet man als Radioaktivität. Wenn man einen Stoff mit N_0 aktiven Atomkernen vorliegen hat, kann man die Anzahl der aktivierten Kerne zu einem Zeitpunkt t durch das Zerfallsgesetz beschreiben:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{18}$$

λ ist hierbei die Zerfallskonstante, welche charakteristisch für den betrachteten Stoff ist. Wenn wir nun die Formel nach der Zeit ableiten und das Vorzeichen wechseln, können wir die Zählrate zu einem bestimmten Zeitpunkt herleiten:

$$n(t) = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = n_0 e^{-\lambda t} \tag{19}$$

mit $n_0 = N_0\lambda$

1.4.2 Geiger-Müller-Zählrohr

Ein Geiger-Müller-Zählrohr ist ein Messgerät, um die Anzahl der Zerfälle eines aktivierten Stoffes zu messen. Dieses besteht aus einem Metallzylinder, welcher mit einem leicht ionisierbaren Gas gefüllt ist. Durch die Mitte des Zylinders läuft ein Anodendraht, welcher durch äußerlich angelegte Spannung ein elektrisches Feld zwischen Anode und Metallzylinder (Kathode) erzeugt. Die radioaktive Strahlung kann von vorne durch ein Fenster in den Zylinder eindringen, wo sie dann einige Teilchen des Gases im Inneren ionisiert. Durch das elektrische Feld werden die Elektronen von den positiv geladenen Ionen getrennt und es kommt zu einem Strom. Einige der geladenen Teilchen können weitere Atome ionisieren, wodurch der gemessene Strom ansteigt. Die Charakteristik eines Zählrohrs ist ein Graph, an dem man ablesen kann, wie hoch die Anzahl der gebildeten Elektron-Ionen-Paare ist.
Am meisten interessiert uns hier jedoch der Plateaubereich, welcher ab einer Einsatzspannung U_E eintritt. In diesem Bereich bleibt die Zählrate nahezu konstant, und es ist somit egal, welche Energie die radioaktive Strahlung hatte, sie wird trotzdem gleich registriert. Bei jedem ionisierten Atom wird eine sogenannte Elektronen-Lawine ausgelöst und von dem Zählrohr aufgenommen. Allerdings geht dabei dann offensichtlich auch die Information darüber, welche Energie die Strahlung hatte, verloren.

2 Messprotokoll

Messprotokoll: Statistik des radioaktiven Zerfalls

Messgeräte:
- Geiger - Müller
- externer Impulszähler
- PC
- Präparatehalterung mit Bleiabschirmung
- Radioaktives Präparat (^{60}Co)

Aufgabe 1: Zählrohrcharakteristik

Zuerst wollen wir die Zählrohrcharakteristik bestimmen. Dafür stellen wir die Spannung ein, bis wir schlagartig das Klicken des Zählers hören. Wir bestimmen, dass die Einsatzspannung $V_E = (500 \pm 5)V$ ist. Wir messen nun in 25V-schritten die Spannung und lassen 30s die Ticks zählen.

U[V]	500	525	550	575	600	625	650
n	1956	1948	1983	1981	1994	2054	2014

$\Delta U = \pm 5V$ ✓

Tabelle 1: Ticks pro angelegte Spannung pro 30s

Wir legen $U_0 = 580V$ fest.

Aufgabe 2: Plateauanstig

Wir bringen das Präparat dicht an das Zählrohr und messen für U_0 und $U_0 + 100V$ eine bzw. drei Minuten die Ticks

	1 min		3 min	
U[V]	580	680	580	680
n	14682	14973	44247	45593

$\Delta n = \sqrt{n}$ ✓

Tabelle 2: Ticks pro Spannung pro Zeit im Plateaubereich

Aufgabe 3: Verifizierung der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls

Nun führen wir eine Langzeitmessung durch, bei der wir 2000 mal bei einer Zerfallsrate von ca. 150-160 $\frac{\text{Zerfälle}}{s}$ und einer Torzeit von 0,5 s die Zerfälle pro Torzeit messen. Wir tragen diese Messungen mit einem Computerprogramm in ein Histogramm auf.

Anzahl der Messungen: 2000
Mittelwert : 70,52
σ : 8,53

Aufgabe 4:

Wir tragen erneut die Ergebnisse einer Messreihe auf, diesmal allerdings bei einer Zerfallsrate von 40-50 $\frac{\text{zerfällen}}{s}$, einer Torzeit von 0,1 s und 5000 Messungen.

Anzahl der Messungen: 5000
Mittelwert : 4,03
σ : 2,03

3 Auswertung

3.1 Aufgabe 1

In der ersten Aufgabe wollen wir uns die Zählrohrcharakteristik des verwendeten Geiger-Müller-Zählrohrs ausgehend von der als $(500 \pm 5)V$ bestimmten Einsatzspannung analysieren. Wir tragen die in $25V$-Schritten gemessenen Daten in ein Diagramm ein, wobei wir den Fehler der Spannung auf $5V$ schätzen und den Fehler der gezählten Klicks mittels $\sigma \approx \sqrt{n}$ errechnen.

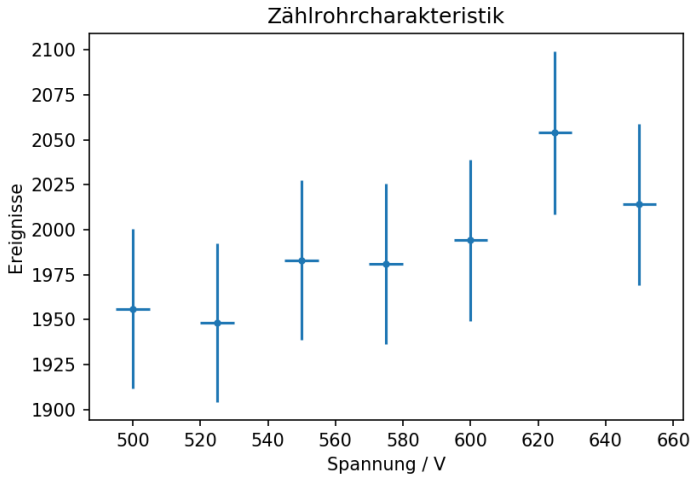


Abbildung 2: Plot der ersten Messreihe

Da alle Messwerte ungefähr zum Plateaubereich zählen könnten (außer vielleicht der $U = 625V$-Wert, allerdings weicht dieser auch nicht so stark ab), legen wir den Plateau-Fit durch alle Messwerte.

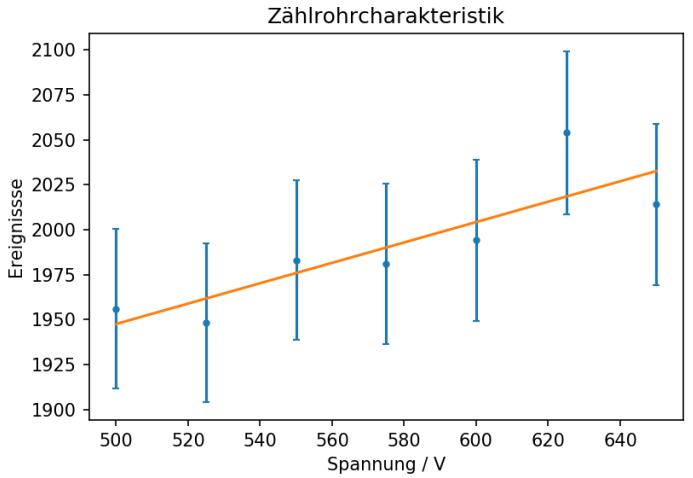


Abbildung 3: Messwerte mit Plateau-Fit

Wir legen also die Betriebsspannung auf $U_0 = 580V$ an, da dieser Wert sehr wahrscheinlich selbst bei Schwankungen der Spannung im Plateau-Bereich liegt.

3.2 Aufgabe 2

Nun wollen wir uns die Eigenschaften des Plateaubereichs genauer anschauen. Da wir sehen, dass auch der Plateaubereich nicht konstant ist, sondern leicht ansteigt, wenn die Spannung größer wird, wollen wir diese Steigung nun bestimmen. Wir nutzen die Tabelle 2 aus dem Messprotokoll, wobei wir der Einfachheit halber die Messzeit und die Spannung als fehlerlos ansehen. Ein potenzieller Fehler wäre gegenüber dem statistischen Fehler der Zählrate vermutlich sowieso vernachlässigbar klein. Wir berechnen für beide Zeitmessungen die Zählrate, von welcher der Fehler folgendermaßen gegeben ist:

$$\Delta n = \frac{\Delta N}{t} = \frac{\sqrt{N}}{t} \tag{20}$$

N ist hierbei die gesamt gezählten Ereignisse (im Messprotokoll noch mit n bezeichnet) und n die Zählrate. Nun rechnen wir die Differenz der Zählraten bei den unterschiedlichen Spannungen (aber gleichen Messzeiten) aus:

$$A = n_{100} - n_0 \tag{21}$$

n_{100} ist die Zählrate, bei der um $100V$ erhöhten Spannung, und n_0 die bei U_0. Der Fehler lässt sich durch quadratische Addition, also:

$$\Delta A = \sqrt{(\Delta n_{100})^2 + (\Delta n_0)^2} \tag{22}$$

Nach Einsetzen erhalten wir für den Anstieg:

$$\boxed{A_{1min} = (4.9 \pm 3.0) s^{-1}}$$
$$\boxed{A_{3min} = (7.5 \pm 2.0) s^{-1}}$$

Um die Signifikanzen der Differenzen zu errechnen, nutzen wir $\frac{A}{\Delta A}$ und erhalten so:

$$\boxed{\frac{A_{1min}}{\Delta A_{1min}} = 1.69}$$
$$\boxed{\frac{A_{3min}}{\Delta A_{3min}} = 4.87}$$

Wir können nun aus den erhaltenen Anstiegen den prozentualen Anstieg pro $100V$ p berechnen:

$$p = \frac{A}{n_0} \tag{23}$$

Mit gaußscher Fehlerfortpflanzung folgt für den Fehler:

$$\Delta p = p\sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n_0}{n_0}\right)^2} \tag{24}$$

Die Ergebnisse lauten:

$$\boxed{p_{1min} = (2.0 \pm 1.2)\%}$$

$$\boxed{p_{3min} = (3.0 \pm 0.6)\%}$$

Wir wollen nun durch diese Ergebnisse rückschließen, wie lange die Messdauer sein muss, um eine Genauigkeit von 1% zu erhalten. Also soll gelten:

$$\frac{\Delta p}{p} \stackrel{!}{=} 0.01 \tag{25}$$

Setzen wir nun unsere bereits erhaltenen Formeln ein, können wir T jeweils berechnen mit:

$$T = \left(\frac{n_{100} + n_0}{(n_{100} - n_0)^2} + \frac{1}{n_0} \right) \cdot \frac{1}{0.01^2} \tag{26}$$

Den Fehler berechnen wir mit:

$$\Delta T = 10^4 \sqrt{\left(\Delta n_{100} \cdot \frac{3n_0 + n_{100}}{(n_{100} - n_0)^3} \right)^2 + \left(\Delta n_0 \cdot \frac{2n_0^3 + 3n_0 n_{100}^2 - n_{100}^3}{n_0^2 (n_{100} - n_0)^3} \right)^2} \tag{27}$$

Wir erhalten:

$$\boxed{T_{1min} = (2.4 \pm 2.9)d}$$
$$\boxed{T_{3min} = (1.0 \pm 0.4)d}$$

([d] ist die Einheit für Tage")
Schließlich interessiert uns noch, wie groß die prozentuale Variation sein darf, damit man beim Erhöhen der Spannung um $\Delta U = 100V$ eine Sicherheit von 1 oder 2 σ haben kann. Berechnen kann man die erlaubte Variation um einen Anfangswert N_0 indem man folgende Formel nutzt:

$$var_n = \frac{n\sigma}{N_0} = \frac{n}{\sqrt{N_0}} \tag{28}$$

Dabei beschreibt $n \in \mathbb{N}$, wie viel σ Sicherheit wir garantieren wollen. Wir erhalten für die $1min$-Messung:

$$\boxed{var_1 = 0.8\%}$$
$$\boxed{var_2 = 1.7\%}$$

Und für die $3min$-Messung:

$$\boxed{var_1 = 0.5\%}$$
$$\boxed{var_2 = 1.0\%}$$

3.3 Aufgabe 3

In Aufgabe 3 werten wir erste der beiden Langzeitmessungen aus. In dieser geht es um die Statistik der Zerfälle mit einem großen Mittelwert der Zerfallsraten. Wir laden die

Textdatei, welche in Aufgabenteil 3 automatisch erstellt wurde, in Python und tragen die Punkte auf. Wir erhalten dieses Diagramm:

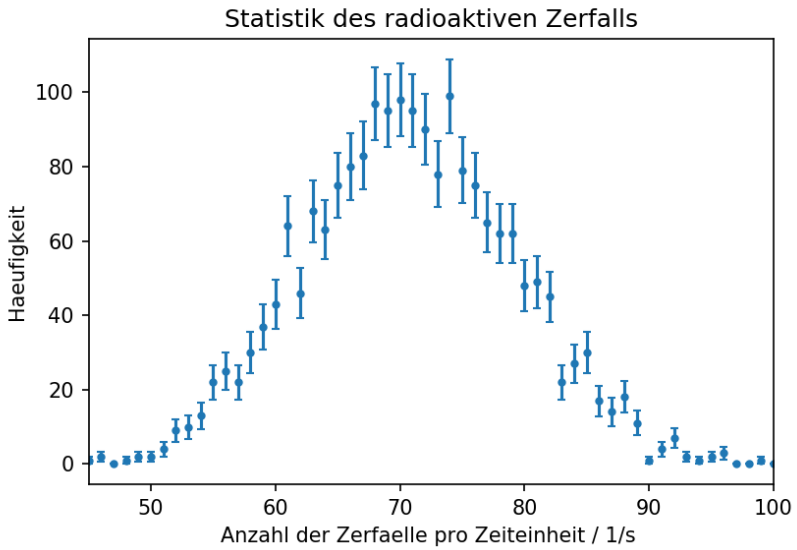


Abbildung 4: Daten der Langzeitmessung 1

Der Fehler wurde Gemäß $\sigma = \sqrt{k}$ berechnet. Nun nutzen wir die curve-fit Funktion, um die optimalen Parameter für die Poisson- und Gaußverteilungen (Formel (6) und Formel (11)) zu finden. Dabei ist wichtig zu beachten, dass wir die diskrete Poisson-Verteilung ins kontinuierliche übergehen lassen, indem wir die Fakultät mit der Gamma-Funktion austauschen. Auch müssen wir einen Streckfaktor A zulassen, da unsere Datenverteilung (offensichtlich) nicht normiert ist. Zudem streichen wir alle Werte, die weniger als 10 mal vorkamen, sodass die Kurven konvergieren können. Wir erhalten als optimale Parameter:

$$\boxed{A_g = 1994 \pm 46}$$
$$\boxed{\mu_g = 70.61 \pm 0.21}$$
$$\boxed{\sigma_g = 8.58 \pm 0.20}$$
$$\boxed{A_p = 1986 \pm 45}$$
$$\boxed{\mu_p = 70.79 \pm 0.21}$$

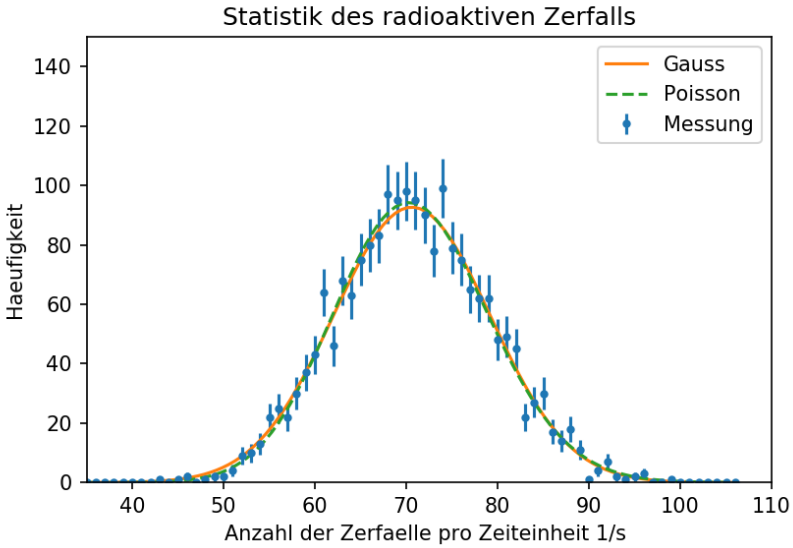


Abbildung 5: Gauß- und Poisson-fit Aufgabe 3

Nun wollen wir mit

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{f(x_i) - y_i}{\Delta y_i} \right)^2 \tag{29}$$

$$\chi^2_{red} = \frac{\chi^2}{d} \tag{30}$$

(f ist die zu x gefittete Funktion, für die gelten soll: f(x)=y, d ist die Anzahl der Freiheitsgrade, die durch Anzahl der Messwerte minus der Anzahl der Fitparameter bestimmt wird) das χ^2_{red} berechnen, wobei ein Wert von ≈ 1 einen guten Fit darstellt. Wir erhalten:

$\boxed{\chi^2_g = 26}$
$\boxed{\chi^2_p = 26}$
$\boxed{\chi^2_{red,g} = 0.8}$
$\boxed{\chi^2_{red,p} = 0.7}$

Mit Hilfe des im Praktikumsskript beschriebenen Codes, können wir nun noch die Fitwahrscheinlichkeit herausfinden:

$\boxed{p_{fit,g} = 0.85}$
$\boxed{p_{fit,p} = 0.86}$

3.4 Aufgabe 4

In Aufgabe 4 Gehen wir genauso wie in der vorhergehenden Aufgabe vor, allerdings nun für die Messreihe mit dem kleineren Mittelwert der Zählrate. Wir wollen aus den Daten aus Aufgabe 4 jedoch nicht nur linear skalierte Plots erstellen, sondern zur besseren Veranschaulichung auch Plots mit einer logarithmischen Skala. Die Werte, die wir so errechnen lauten einfach herunter geschrieben:

$\boxed{A_g = 4952 \pm 71}$
$\boxed{\mu_g = 3.93 \pm 0.03}$
$\boxed{\sigma_g = 2.019 \pm 0.025}$
$\boxed{\chi^2_g = 112}$
$\boxed{\chi^2_{red,g} = 12.4}$
$\boxed{p_{fit,g} = 0.0\%}$
$\boxed{A_p = 4994 \pm 71}$
$\boxed{\mu_p = 4.033 \pm 0.029}$
$\boxed{\chi^2_p = 8.46}$
$\boxed{\chi^2_{red,p} = 0.84}$
$\boxed{p_{fit,p} = 58.0\%}$

Die erstellten Plots sehen folgendermaßen aus:

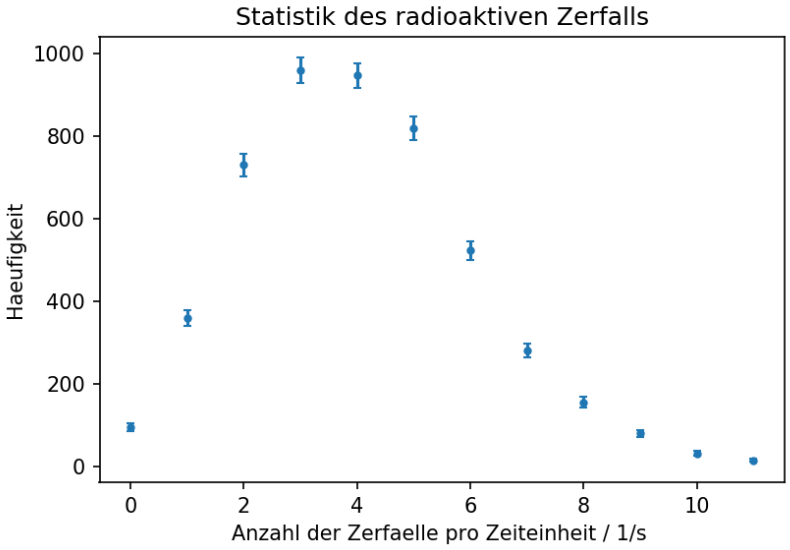


Abbildung 6: Daten der Langzeitmessung 2

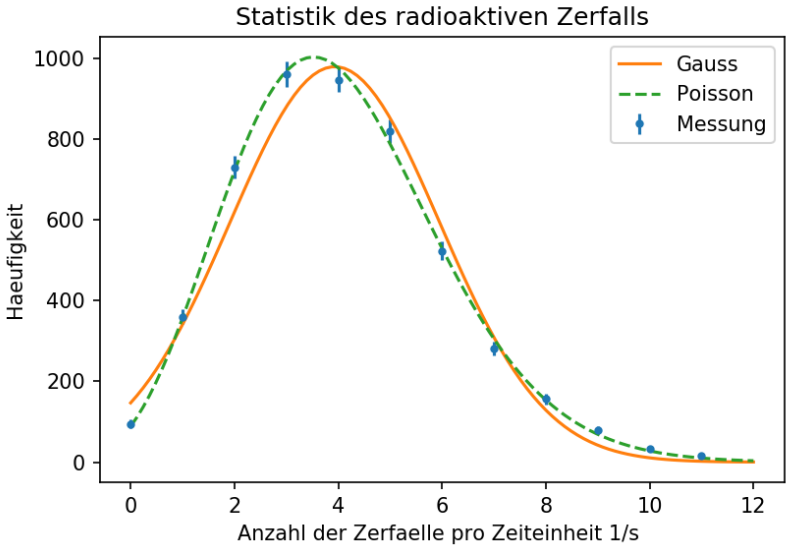


Abbildung 7: Gauß- und Poisson-fit Aufgabe 4

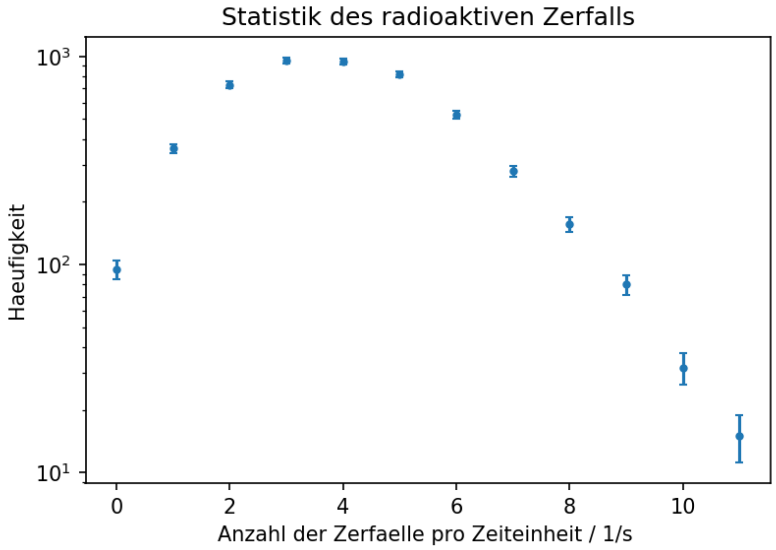


Abbildung 8: Daten der Langzeitmessung 2 (logarithmisch

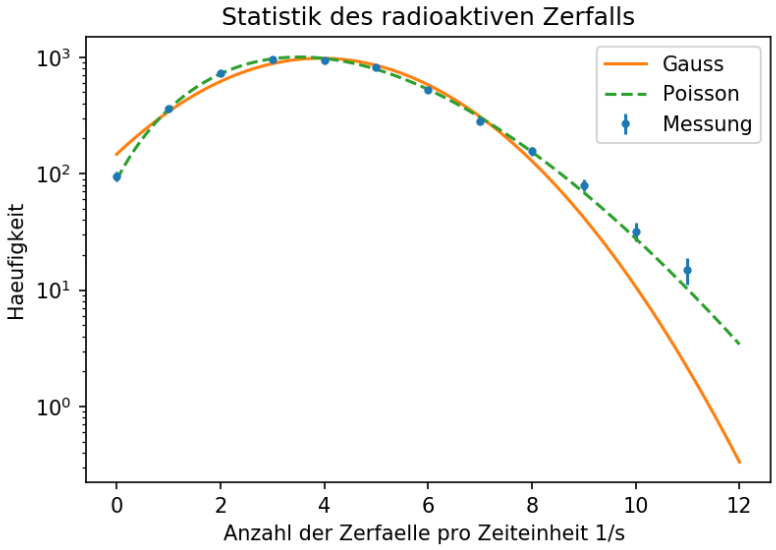


Abbildung 9: Gauß- und Poisson-fit Aufgabe 4 (logarithmisch)

4 Zusammenfassung und Diskussion

Um noch einmal alles zusammenzufassen haben wir zuerst die Zählcharakteristik unseres Geiger-Müller-Zählrohrs analysiert und konnten dadurch eine optimale Betriebsspannung von $500V$ bestimmen. Beim genaueren Analysieren des Plateaubereich konnten wir durch zwei Messreihen mit unterschiedlichen Messdauern den Anstieg des Plateaus herausfinden. Wir erhielten:

$$\boxed{A_{1min} = (4.9 \pm 3.0)s^{-1}}$$
$$\boxed{A_{3min} = (7.5 \pm 2.0)s^{-1}}$$

Daraus haben wir die Signifikanzen bestimmt als:

$$\boxed{\frac{A_{1min}}{\Delta A_{1min}} = 1.69}$$
$$\boxed{\frac{A_{3min}}{\Delta A_{3min}} = 4.87}$$

Wir sehen also, dass durch den Anstieg der Steigung und durch den kleiner werdenden Fehler die Signifikanz deutlich größer geworden ist, und so der vermutete Plateau-Anstieg ein nicht zu vernachlässigenden Phänomen ist. Mit diesem wissen wollten wir nun noch einen prozentualen Anstieg des Plateaus berechnen und bekamen:

$$\boxed{p_{1min} = (2.0 \pm 1.2)\%}$$
$$\boxed{p_{3min} = (3.0 \pm 0.6)\%}$$

Wir haben zudem noch bestimmt, wie lange man messen müsste, um eine Abweichung von 1% zu erhalten:

$$\boxed{T_{1min} = (2.4 \pm 2.9)d}$$
$$\boxed{T_{3min} = (1.0 \pm 0.4)d}$$

Die Ungenauigkeit bei der $1min$ Messung war also durch die statistischen Schwankungen zu groß, um festlegen zu können, wie lange man genau für eine 1%-Genauigkeit braucht. Die $3min$ Messung ist zwar etwas aufschlussreicher, jedoch grenzt der 40% Fehler die Zeitspanne nur schlecht ein. Um hier genauere Daten herauszufinden, müsste man noch längere Messungen durchführen um so hoffentlich die statistischen Schwankungen der Radioaktivität besser zu unterdrücken. Die Varianzen der Steigung bei einer Abweichung von höchstens 1 oder 2-σ ergaben:

$$\boxed{var_{1\sigma,1min} = 0.8\%}$$
$$\boxed{var_{2\sigma,1min} = 1.7\%}$$
$$\boxed{var_{1\sigma,3min} = 0.5\%}$$
$$\boxed{var_{2\sigma,3min} = 1.0\%}$$

Nun haben wir zwei Langzeitmessungen mit verschiedenen mittleren Zählraten durchgeführt um so zum einen die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls zu verifizieren und zum anderen um zu schauen, ob eine Gauß- oder eine Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeiten besser nähert. Die Werte, die wir bei der großen Zählrate für den Mittelwert, die Standardabweichung und die Fitwahrscheinlichkeiten erhielten lautet:

$$\boxed{\mu_g = 70.61 \pm 0.21}$$
$$\boxed{\sigma_g = 8.58 \pm 0.20}$$
$$\boxed{\mu_p = 70.79 \pm 0.21}$$
$$\boxed{p_{fit,g} = 0.85}$$
$$\boxed{p_{fit,p} = 0.86}$$

Bei der kleineren Zählrate sah das Ergebnis so aus:

$$\boxed{\mu_g = 3.93 \pm 0.03}$$
$$\boxed{\sigma_g = 2.019 \pm 0.025}$$
$$\boxed{\mu_p = 4.033 \pm 0.029}$$
$$\boxed{p_{fit,g} = 0.0\%}$$
$$\boxed{p_{fit,p} = 58.0\%}$$

Vergleichen wir diese nun mit den Werten aus dem Zählprogramm, welche wir in unserem Messprotokoll festgehalten haben, erhalten wir für die große Zählrate Abweichungen von:

$\boxed{\sigma_{\mu,g} = 0.4}$
$\boxed{\sigma_{\sigma,g} = 0.25}$
$\boxed{\sigma_{\mu,p} = 1.3}$

Bei der kleinen Zählrate lauten die Abweichungen:

$\boxed{\sigma_{\mu,g} = 3.3}$
$\boxed{\sigma_{\sigma,g} = 0.44}$
$\boxed{\sigma_{\mu,p} = 0.10}$

Wir sehen also, dass bei großen Zählraten beide Näherungen die tatsächliche Wahrscheinlichkeitsverteilung relativ gut widerspiegeln. Unsere Parameter aus der curve-fit Funktion weisen nur insignifikante Abweichungen von den Werten, die uns im Programm direkt ausgegeben wurden, auf. Allerdings sehen wir, das tendenziell der Poisson-fit eine größere Abweichung aufweist, also wie bereits erwartet die ßchlechtereNäherung darstellt. Diese Intuition wird (wenn auch sehr gering) auch in den berechneten Fitwahrscheinlichkeiten bestätigt. Hier ist $p_{fit,g}$ näher an den optimalen 50% als $p_{fit,p}$. Allerdings auch nur um 1%, was nicht wirklich unfassbar deutlich ist. Man kann also schon davon ausgehen, dass der Gauß-Fit hier die bessere Wahl wäre, jedoch ist der Poisson-Fit trotzdem noch eine fast genauso gute Näherung.
Schauen wir uns die Werte für die kleine Zählrate an. sehen wir, dass der Mittelwert des Gauß-Fits eine Signifikante Abweichung zu dem Wert des Programms aufweist, während der Poisson-Fit eine sehr geringe Abweichung zeigt. Zwar ist die berechnete Standardabweichung nicht Signifikant verschieden, allerdings wird diese ja vom Mittelwert aus gerechnet und so bestätigt das weiterhin, dass der Gauß-Fit hier nicht angebracht ist. Die Fitwahrscheinlichkeiten bestätigen diese Vermutung, da der Gauß-Fit hier eine Wahrscheinlichkeit von 0.0% erhielt, er also die Verteilung nicht gut beschreibt, wobei der Poisson-Fit mit 58.0% eine durchaus gute Näherung darstellt. Auch das bestätigt also unsere theoretischen Vermutungen.

Wir haben also erfolgreich die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls nachgewiesen und anhand zwei verschiedener Beispiele gesehen, wann und warum in manchen Fällen die Gaußkurve oder die Poissonkurve die genauere Näherung der Statistik eines radioaktiven Systems ist.

Da unsere Ergebnisse größten Teils den theoretischen Erwartungen entsprechen, denke ich nicht, dass es grobe systematische Fehler bei der Versuchsdurchführung gab. Während des Versuches aufgefallen sind uns ebenfalls keine, weswegen ich bei einer erneuten Versuchsdurchführung nicht viel ändern würde. Eine trotzdem vermutlich sinnvolle Änderung ist das verlängern der Dauer der Messung des Plateauanstiegs, da wir bei den Zeiten von $1min$ und $3min$ sehr ungenaue Messwerte erhielten, die nur bedingt für genauere Analysen des Zerfalls geeignet sind. Für unsere Zwecke war es allerdings ausreichend, und eine Verlängerung der Messzeit würde natürlich auch die komplette Durchführung des Versuches in die Länge ziehen.

Versuch_251_Statistik

December 23, 2024

[1]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

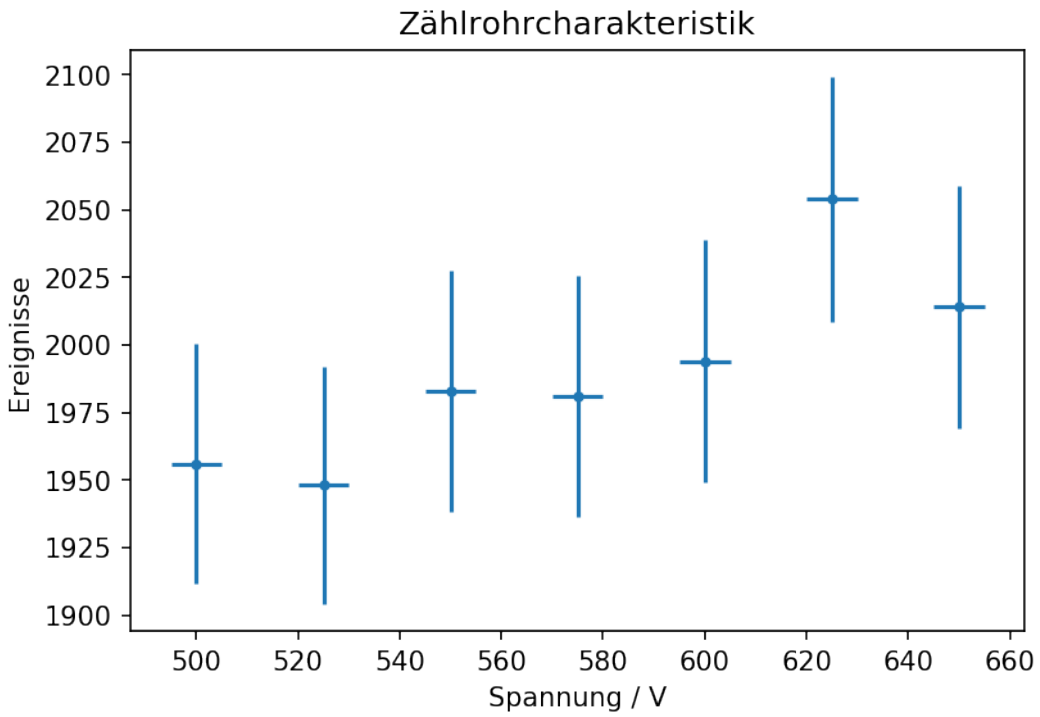
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy.special import gamma
from scipy.stats import chi2
```

[2]:
```
# Aufgabe 2

#Zaehlrohrspannung:
U=np.arange(500, 675, 25)
print(U)
dU=5#Ablesefehler der Spannung
#gezaehlte Ereignisse
N=np.array([1956,1948,1983,1981,1994,2054,2014])
assert(len(U) == len(N))
Fehler_N=np.sqrt(N)
print(Fehler_N)
```

```
[500 525 550 575 600 625 650]
[44.22668877 44.13615298 44.53088816 44.50842617 44.65422712 45.32107677
 44.87761134]
```

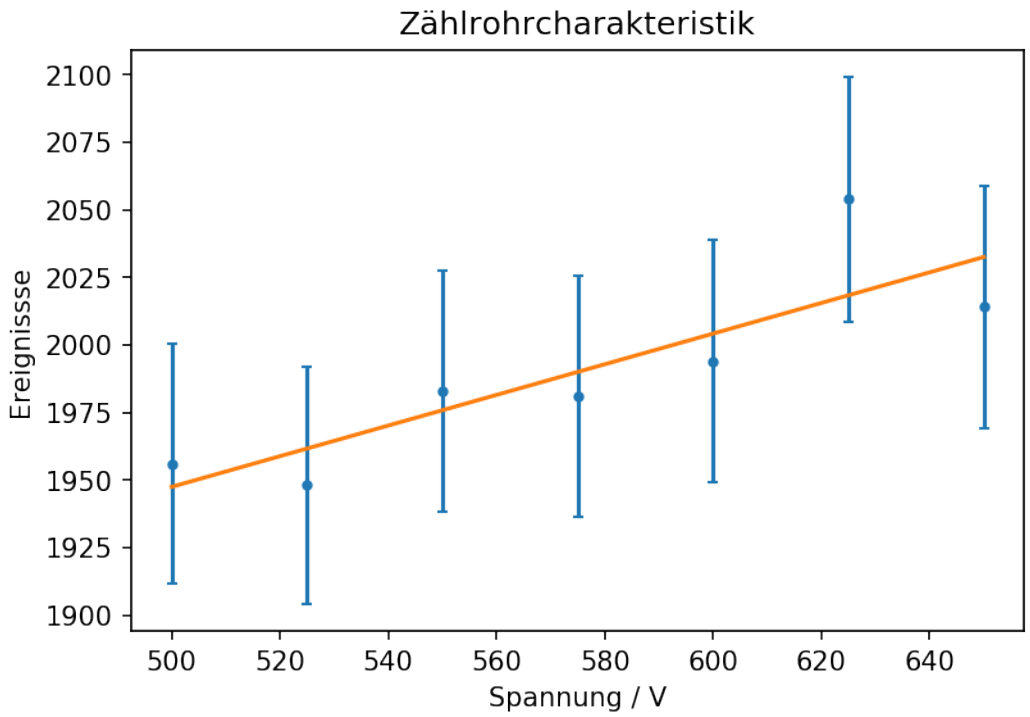
[3]:
```
plt.figure(dpi=150)
plt.errorbar(U, N, yerr=Fehler_N,xerr=dU, fmt=".")
plt.xlabel('Spannung / V')
plt.ylabel('Ereignisse')
plt.title('Zählrohrcharakteristik')
plt.savefig('Plot1Stat.png')
plt.show()
```



[4]:
```
def linear(x,a,b):
    return a*x+b

popt, pcov=curve_fit(linear, U[0:10], N[0:10])
```

[5]:
```
plt.figure(dpi=150)
plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=".",capsize = 2)
plt.xlabel('Spannung / V')
plt.ylabel('Ereignissse')
plt.title('Zählrohrcharakteristik')
plt.plot(U[0:10], linear(U[0:10],*popt))
plt.savefig('Plot2Stat.png')
```



[6]:
```
U0 = np.mean(U[[0,6]])
U0
```

[6]: 575.0

[7]:
```
# Aufgabe 3

N_1 = np.array([14682, 14973]) # U0 , U0 +100, t=1min
N_3 = np.array([44247, 45593]) # U0 , U0 +100, t=3min
err_N_1 = np.sqrt(N_1)
err_N_3 = np.sqrt(N_3)
n_1 = N_1/60
n_3 = N_3/180
err_n_1 = err_N_1/60
err_n_3 = err_N_3/180
A_1 = n_1[1]-n_1[0]
err_A_1 = np.sqrt(err_n_1[1]**2+err_n_1[0]**2)
A_3 = n_3[1]-n_3[0]
err_A_3 = np.sqrt(err_n_3[1]+err_n_3[0])
print("1min: slope =", A_1 ,"+-", np.round(err_A_1))
print("3min: slope =", A_3 ,"+-", np.round(err_A_3))
print("sigma 1min: ", np.round(A_1/err_A_1,2))
print("sigma 3min: ", np.round(A_3/err_A_3,2))
```

```
1min: slope = 4.850000000000023 +- 3.0
3min: slope = 7.4777777777777885 +- 2.0
sigma 1min:  1.69
sigma 3min:  4.87
```

[8]:
```
ratio_1 = A_1/n_1[0]
err_ratio_1 = ratio_1 * np.sqrt( (err_n_1[0]/n_1[0])**2 + (err_A_1/A_1)**2)
ratio_3 = A_3/n_3[0]
err_ratio_3 = ratio_3 * np.sqrt( (err_n_3[0]/n_3[0])**2 + (err_A_3/A_3)**2)
print("1min Anstieg =", np.round(ratio_1*100,2),"%")
print("3min Anstieg =", np.round(ratio_3*100,2),"%")
print("error 1min Anstieg =", np.round(err_ratio_1*100,2),"%")
print('error 3min Anstieg =', np.round(err_ratio_3*100,2),"%")
```

```
1min Anstieg = 1.98 %
3min Anstieg = 3.04 %
error 1min Anstieg = 1.17 %
error 3min Anstieg = 0.62 %
```

[9]:
```
# Wann 1% genau?
Ts = (1/0.01**2)*((n_1[1]+n_1[0])/((n_1[1]-n_1[0])**2) + (1)/(n_1[0]))
Tmin = Ts/60
Th = Tmin/60
Td = Th/24


Delta_Ts = (1/0.01**2) * np.sqrt(
    (err_n_1[1] * (3 * n_1[0] + n_1[1]) / (n_1[1] - n_1[0])**3)**2 +
    (err_n_1[0] * (2 * n_1[0]**3 + 3 * n_1[0] * n_1[1]**2 - n_1[1]**3) /␣
 ↪(n_1[0]**2 * (n_1[1] - n_1[0])**3))**2
)
Delta_Tmin = Delta_Ts/60
Delta_Th = Delta_Tmin/60
Delta_Td = Delta_Th/24
print(Td)
print(Delta_Td)
```

```
2.4323939643668795
2.878189138546283
```

[10]:
```
Ts = (1/0.01**2)*((n_3[1]+n_3[0])/((n_3[1]-n_3[0])**2) + (1)/(n_3[0]))
Tmin = Ts/60
Th = Tmin/60
Td = Th/24
print(Td)

Delta_Ts = (1/0.01**2) * np.sqrt(
    (err_n_3[1] * (3 * n_3[0] + n_3[1]) / (n_3[1] - n_3[0])**3)**2 +
```

```
    (err_n_3[0] * (2 * n_3[0]**3 + 3 * n_3[0] * n_3[1]**2 - n_3[1]**3) /␣
↪(n_3[0]**2 * (n_3[1] - n_3[0])**3))**2
)
Delta_Tmin = Delta_Ts/60
Delta_Th = Delta_Tmin/60
Delta_Td = Delta_Th/24
print(Delta_Td)
```

```
1.0335613849709089
0.4600660006996484
```

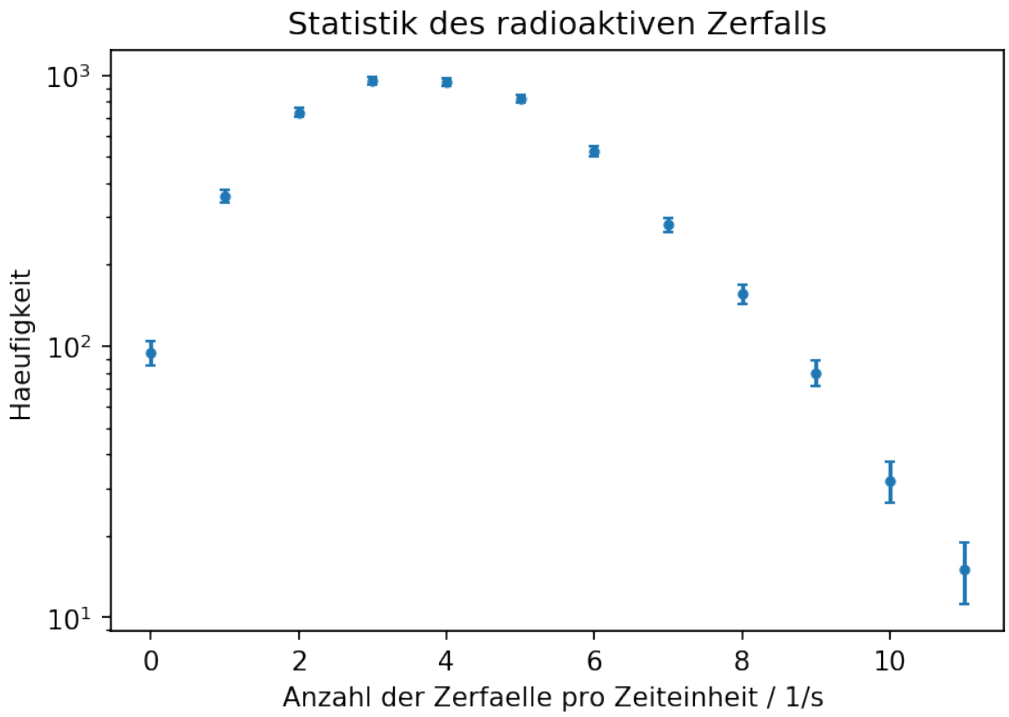
[11]:
```
print(1/np.sqrt(N_1[0]))
print(2/np.sqrt(N_1[0]))
print(1/np.sqrt(N_3[0]))
print(2/np.sqrt(N_3[0]))
```

```
0.00825291534145919
0.01650583068291838
0.0047539880402837275
0.009507976080567455
```

[12]:
```
# Aufgabe 4

anzahl, haeufigkeit=np.loadtxt("./Messwerte/data_aufgabe3.txt", unpack=True,
                               delimiter = ",", skiprows = 4, usecols = (0,1) )
fehler=np.sqrt(haeufigkeit)
```

[24]:
```
plt.figure(dpi=150)
plt.errorbar(anzahl[0:12], haeufigkeit[0:12], fehler[0:12], fmt=".",capsize=2)
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit / 1/s ')
plt.ylabel('Haeufigkeit')
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
plt.yscale('log')
plt.savefig('Plot7Stat.png')
```



[14]:
```
def gaussian(x, A, mu, sig): #A: Flaeche der Gaussfunktion
    return (1/np.sqrt((2*np.pi*(sig**2))))*np.exp(-0.5*((x-mu)**2/(sig**2)))*A
```

[15]:
```
popt_g, pcov_g=curve_fit(gaussian, anzahl[0:12], haeufigkeit[0:12], p0 = [100,␣
↪6, 2], sigma=fehler[0:12], absolute_sigma = True)
```

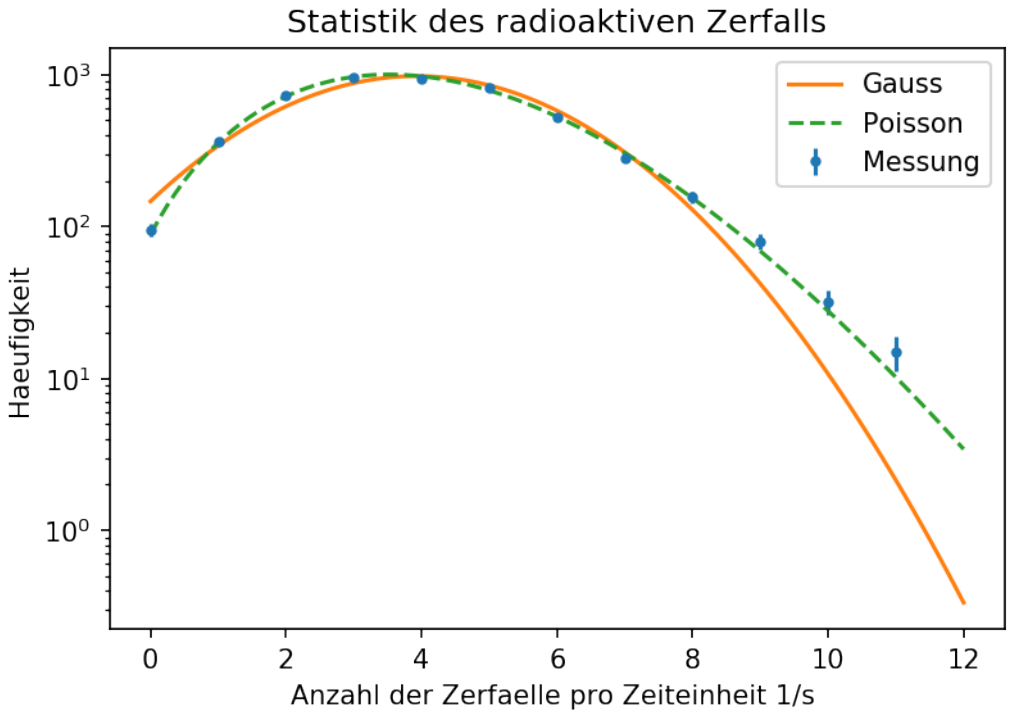
[16]:
```
print(fehler[0:12])
```

```
[ 9.74679434 18.97366596 27.01851217 30.98386677 30.757113   28.61817604
 22.86919325 16.79285562 12.489996    8.94427191  5.65685425  3.87298335]
```

[17]:
```
def poisson(x, A_p, mu_p):
    return A_p*np.exp(-mu_p)*mu_p**x/gamma(x+1)
popt_p, pcov_p = curve_fit(poisson, anzahl[0:12], haeufigkeit[0:12], p0=[1000,␣
↪6],sigma = fehler[0:12], absolute_sigma=True)
```

[23]:
```
plt.figure(dpi=150)
plt.errorbar(anzahl[0:12],haeufigkeit[0:12],fehler[0:12], fmt=".
↪",label='Messung')
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit 1/s ')
plt.ylabel('Haeufigkeit')
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
x=np.linspace(0, 12,100)
```

```
plt.plot(x, gaussian(x,*popt_g), label='Gauss')
plt.plot(x, poisson(x,*popt_p), label='Poisson',linestyle='dashed')
plt.yscale('log')
plt.legend()
plt.savefig('Plot8Stat.png')
```



[19]:
```
print("Gaussfit:")
print("A=", popt_g[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_g[0][0]))
print("mu=", popt_g[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_g[1][1]))
print("sig=", popt_g[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_g[2][2]))
print("Poissonfit:")
print("A=", popt_p[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_p[0][0]))
print("mu=", popt_p[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_p[1][1]))
```

```
Gaussfit:
A= 4952.072694604256 , Standardfehler= 71.05522097826537
mu= 3.9334615076724444 , Standardfehler= 0.03012016196256777
sig= 2.018856571947306 , Standardfehler= 0.024914435258991657
Poissonfit:
A= 4994.44089368019 , Standardfehler= 70.70667853410694
mu= 4.033338050806953 , Standardfehler= 0.029043049314399615
```

[20]:
```
#Gauss:
x1 = ((gaussian(anzahl[0:12],*popt_g)-haeufigkeit[0:12])**2)
x2 = fehler[0:12]**2
chi2_div = x1/x2
chi2_g= np.sum(chi2_div)
dof_g=len(anzahl[0:12])-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red_g=chi2_g/dof_g
print("chi2_g=", chi2_g)
print("chi2_red_g=",chi2_red_g)
```

```
chi2_g= 111.9338351833983
chi2_red_g= 12.437092798155367
```

[21]:
```
#Poisson:
x11 = (poisson(anzahl[0:12],*popt_p)-haeufigkeit[0:12])**2
x22 = fehler[0:12]**2
chi2_div = x11/x22
chi2_p = np.sum(chi2_div)
dof_p = len(anzahl[0:12])-2 #poisson hat nur 2 Parameter
chi2_red_p=chi2_p/dof_p
print("chi2_p=", chi2_p)
print("chi2_red_p=",chi2_red_p)
```

```
chi2_p= 8.460098367805518
chi2_red_p= 0.8460098367805517
```

[364]:
```
prob_g = round(1-chi2.cdf(chi2_g, dof_g), 2)*100
prob_p = round(1-chi2.cdf(chi2_p, dof_p), 2)*100
print("Wahrscheinlichkeit Gauss=", prob_g, "%")
print("Wahrscheinlichkeit Poisson=", prob_p, "%")
```

```
Wahrscheinlichkeit Gauss= 0.0 %
Wahrscheinlichkeit Poisson= 57.99999999999999 %
```